Exercice

Soit n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce équilibrée et on joue à un jeu.

Pour tout entier $k \in \{1; \dots; n\}$:

- si la pièce tombe sur pile au k^{e} lancer, on gagne k € ;
- sinon, on ne gagne rien.

On note X_k la variable aléatoire correspondant au gain

obtenu lors du k^{e} tirage et, pour tout $\ell \in \{1; \dots; n\}$,

Y_ℓ le total des gains obtenus à l'issue du ℓ^{e} lancer.

1. Étude de X_k .

a. Pour tout entier $k \in \{1; \dots; n\}$, déterminer la loi de probabilité de X_k .

b. En déduire $E(X_k)$.

c. Montrer que, pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$, $V(X_k) = \frac{k^2}{4}$.

2. Étude de Y_ℓ .

a. Exprimer, pour tout entier $\ell \in \{1; \dots; n\}$, Y_ℓ en fonction des variables aléatoires X_k .

b. • Déterminer l'espérance de Y_ℓ .

- Déterminer le nombre théorique de lancers nécessaires afin que le gain total dépasse 280 €.

c. • Montrer par récurrence sur l'entier $m \geq 1$ que

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

- En déduire $V(Y_\ell)$ en fonction de ℓ .